

問題 C – 天下 – 不正

問題概要

- 縦線が W 本、横線が H 本のあみだくじがある。
- 好きな位置に横線を追加し、あみだくじの結果を操作したい。
- 必要な横線は最小で何本か？

満点解法

- このあみだくじに横線を追加し、一番下を $(3, 2, 1, 0)$ にしたい。
- このとき、下から順に横線を追加するルールを設ける。

0	1	2	3
1	0	2	3
1	0	3	2
0	1	3	2
0	1	2	3

満点解法

- 例えば、まず 1 と 2 をスワップしたいとする。
- そのためには、1 と 2 が隣り合う位置に横線を追加すればよい。

0	1	2	3
1	0	2	3
1	0	3	2
0	1	3	2
0	1	2	3

満点解法

- 1と2が隣り合う位置は2箇所あるが、下から順に横線を追加するというルールがあるので、できるだけ下に横線を引きたい。

0	1	2	3
1	0	2	3
1	0	3	2
0	1	3	2
0	1	2	3

満点解法

- 横線を追加したことによって、下流の並びが変わってしまいましたが、下から順に横線を引くというルールを設けたので、問題ない。

0	1	2	3
1	0	2	3
1	0	3	2
0	1	3	2
0	1	2	3
0	2	1	3

満点解法

- 例えば、次に 0 と 3 をスワップしたいとする。
- そのためには、0 と 3 が隣り合う位置に横線を追加すればよい。

0	1	2	3
1	0	2	3
1	0	3	2
0	1	3	2
0	1	2	3
0	2	1	3

満点解法

- ただし、さっきの横線よりも上の位置に横線を引かなければならない。

0	1	2	3
1	0	2	3
1	0	3	2
0	1	3	2
0	1	2	3
0	2	1	3

満点解法

- また下流の並びが変わってしまったが問題ない。
- 2本の横線を追加することで、一番下を目標の順列にできた。

0	1	2	3
1	0	2	3
1	0	3	2
1	3	0	2
3	1	0	2
3	1	2	0
3	2	1	0

満点解法

- 今の例を実装する。
- $dp[t][P] := t$ 本の横線を追加して一番下の順列が P のとき、最後に追加した横線の最も下の位置 (不可能ならば -1)

0	1	2	3
1	0	2	3
1	0	3	2
1	3	0	2
3	1	0	2
3	1	2	0
3	2	1	0

満点解法

- $dp[t][P]$ を $t=0,1,2,\dots$ の順に更新し、 $dp[t][\text{目標の順列}]$ が -1 でないような最小の t が答え。

0	1	2	3
1	0	2	3
1	0	3	2
1	3	0	2
3	1	0	2
3	1	2	0
3	2	1	0

満点解法

- $dp[t][P]$ のうち、 t は高々 $(W-1, W-2, \dots, 0)$ の反転数で 21
- P は $7!=5,000$ 程度
- 遷移が $7 \times 6/2=21$ 程度
- 合わせて $O(W!W^4)$

0	1	2	3
1	0	2	3
1	0	3	2
1	3	0	2
3	1	0	2
3	1	2	0
3	2	1	0