

天下一プログラマーコンテスト2015決勝

D 問題 解説



AtCoder

AtCoder株式会社 代表取締役

高橋直大

D問題 ほぼピタゴラスの三角形

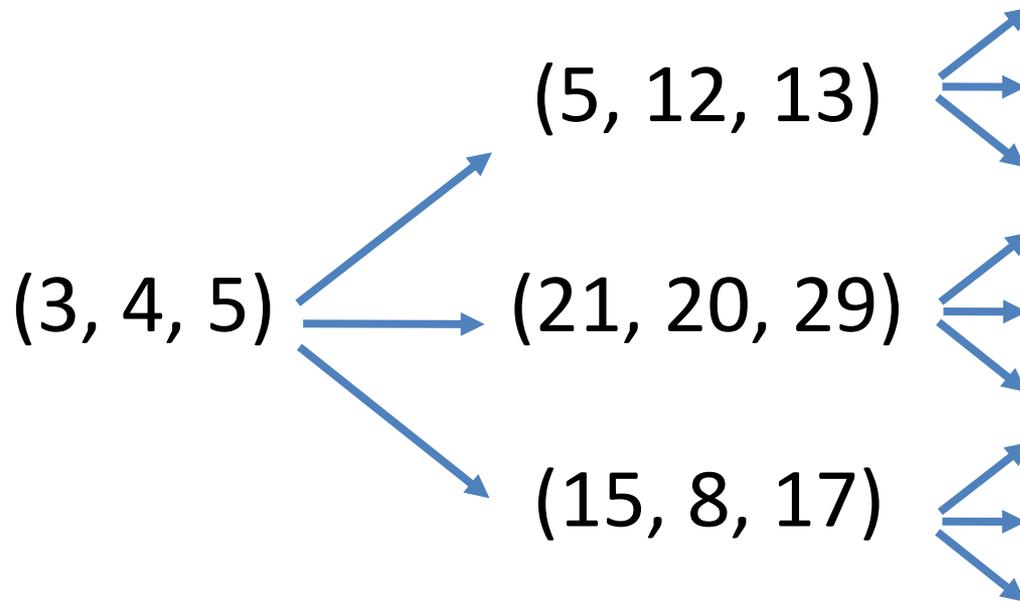
1. 問題概要
2. 解法

ほぼピタゴラスの三角形を数える.

- 辺の長さ a, b, c が全て自然数
- $\gcd(a, b, c) = 1$
- $a \leq b \leq c$
- $a^2 + b^2 + s^2 = c^2$ ← s が 0 ならピタゴラスの三角形
- a, b, c は三角形を成す

注意 : (4, 4, 9) は三角形になってないよ !

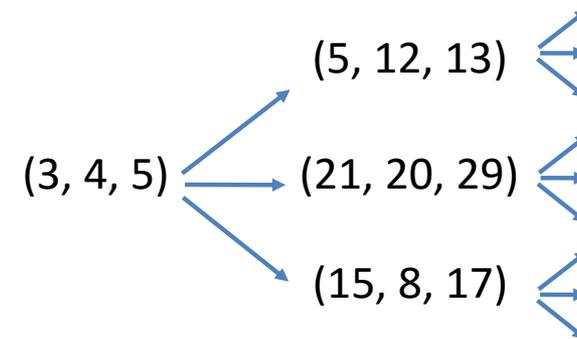
ピタゴラスの三分木



全ての原始的ピタゴラス数が一度ずつ出てくる.

- ピタゴラス数 : $a^2 + b^2 = c^2$
- 原始的 : $\gcd(a, b, c) = 1$

ピタゴラスの三分木の作り方



① 子への移動

$$\begin{pmatrix} +1 & -2 & +2 \\ +2 & -1 & +2 \\ +2 & -2 & +3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} +1 & +2 & +2 \\ +2 & +1 & +2 \\ +2 & +2 & +3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & +2 & +2 \\ -2 & +1 & +2 \\ -2 & +2 & +3 \end{pmatrix}$$

$(a, b, c)^T$ に左から掛ける.

② 親への移動

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & +2 \\ -2 & -1 & +2 \\ -2 & -2 & +3 \end{pmatrix}$$

$(a, b, c)^T$ に左から掛けて、絶対値を取る.

このピタゴラスの三分木を応用して
ほぼピタゴラスの三角形の候補を列挙したい。

大事な性質

さっきの行列たちは, $c^2 - a^2 - b^2$ を不変にする!

ただし

- ピタゴラス数の場合は (3, 4, 5) から全ていけた
- ほぼピタゴラス数の場合は根が複数あり得る.....!

根である必要十分条件

親を作る行列を掛けた時, 全ての要素が正になる.
(かつ原始的)

根である必要条件を整理して根の列挙を試みる

- $a \leq b$ を仮定し, 数式を整理すると
$$4s^2 > a(4b - 3a) \geq a^2$$

→ つまり $0 \leq a < 2s$.
- このような a を全て試し,
$$(c - b)(c + b) = a^2 + s^2$$
を用いて, b, c を全て列挙.
- 上の条件を使ってチェック.

ほぼピタゴラスの三角形を全て生成

- 子に行くと、常に周長が増加するので、周長が L を超えない範囲で DFS.
- 毎回、三角形になっているかのチェックを行う必要あり.