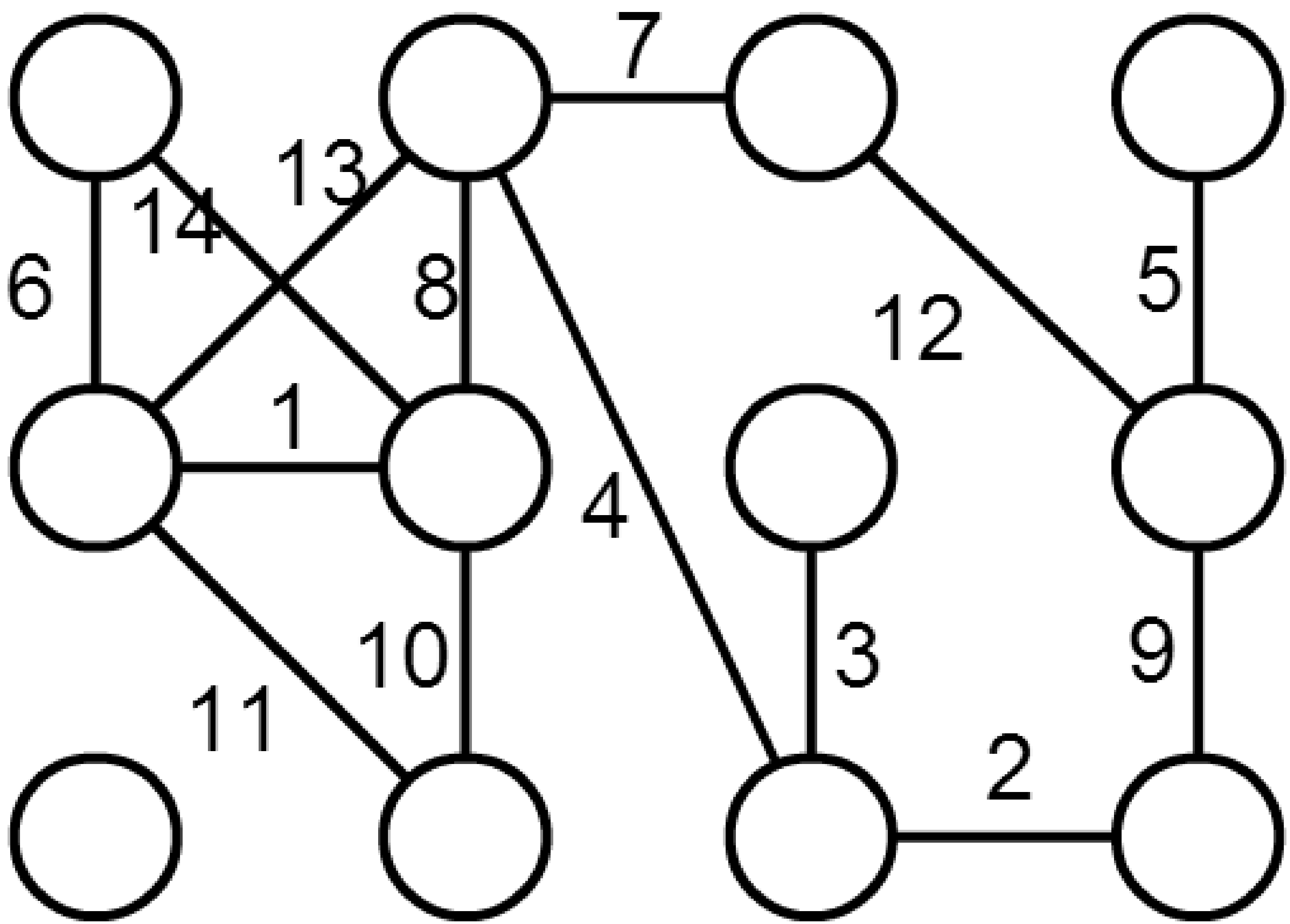
天下一プログラマーコンテスト2015解説
G:天下一ゲーム

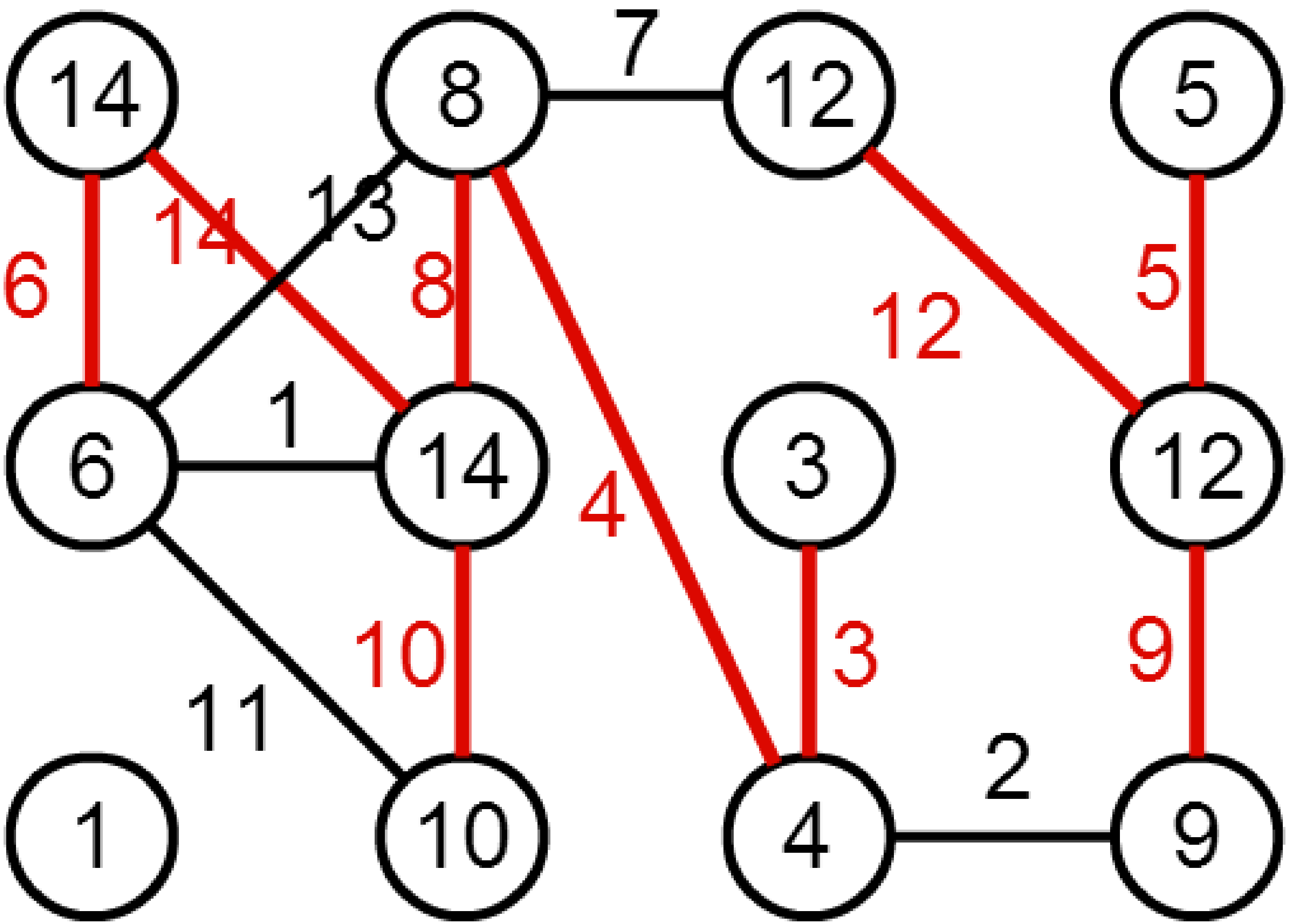
G-問題概要

- N頂点、M辺のグラフが与えられる
- 各辺には相異なる整数が書かれている
- ラッキーな辺の個数が最大になるように各頂点に整数を書き込め
- ラッキーな辺とは
  - 辺に書き込まれている整数が、結ぶ2つの頂点に書き込まれている整数のうち小さい方と一致する辺

G-入力例3図解



G-入力例3図解



G-考察

- 各辺についてラッキーにするかどうか決めた時
  - それを満たす最終状態があるかどうか
  - ある場合、その具体的な最終状態

  を簡単に求めることが出来る

G-考察

- 各辺についてラッキーにするかどうか決めた時
  - それを満たす最終状態があるかどうか
  - ある場合、その具体的な最終状態

  を簡単に求めることが出来る
- 各頂点には周りのラッキーにする予定の辺に書かれている値のなかで最大の物を書けば良い
  - 小さくすると、最大の値の辺がラッキーにならない
  - 大きくすると、どの辺とも関係ない値になる

G-考察

- 各辺についてラッキーにするかどうか決めた時
  - それを満たす最終状態があるかどうか
  - ある場合、その具体的な最終状態

  を簡単に求めることが出来る
- 各頂点には周りのラッキーにする予定の辺に書かれている値のなかで最大の物を書けば良い
  - 小さくすると、最大の値の辺がラッキーにならない
  - 大きくすると、どの辺とも関係ない値になる
- 実際に書いて、ラッキーにしたい辺が全てラッキーになっているか調べれば良い

G-考察

- 辺の数はM個、それぞれについてラッキーにするかどうか考えればいいので、探索するべき状態は2^M個ある
  - さすがに大きすぎる

G-考察

- 辺の数はM個、それぞれについてラッキーにするかどうか考えればいいので、探索するべき状態は2^M個ある
  - さすがに大きすぎる

- 探索の仕方を工夫すればうまく時間を節約できる

G-考察

- 書かれている値が大きい順番に辺を見ていく

G-考察

- 書かれている値が大きい順番に辺を見ていく
- 順番にそれをラッキーな辺にするかどうかを決めていく操作を考える

G-考察

- 書かれている値が大きい順番に辺を見ていく
- 順番にそれをラッキーな辺にするかどうかを決めていく操作を考える
  - その辺をラッキーにするならば、その辺が結ぶ頂点のうち、まだなにも書き込まれていない頂点にその辺の値を書き込めば良い
    - 両端ともすでになにか書き込まれていたらその辺はラッキーに出来ない

G-考察

- この操作で気にしなければならない情報は
  - いま、大きい方からいくつ目の辺までみたか
  - いま、値が書き込まれている頂点はどれか

  の2点のみ

G-考察

- この操作で気にしなければならない情報は
  - いま、大きい方からいくつ目の辺までみたか
  - いま、値が書き込まれている頂点はどれか

  の2点のみ
- すでに書き込まれている値が何かわからなくても、書き込まれているかどうかだけさえわかれば十分であることに注意
  - 辺の値が大きい方から見ていっているおかげ

G-部分点解法

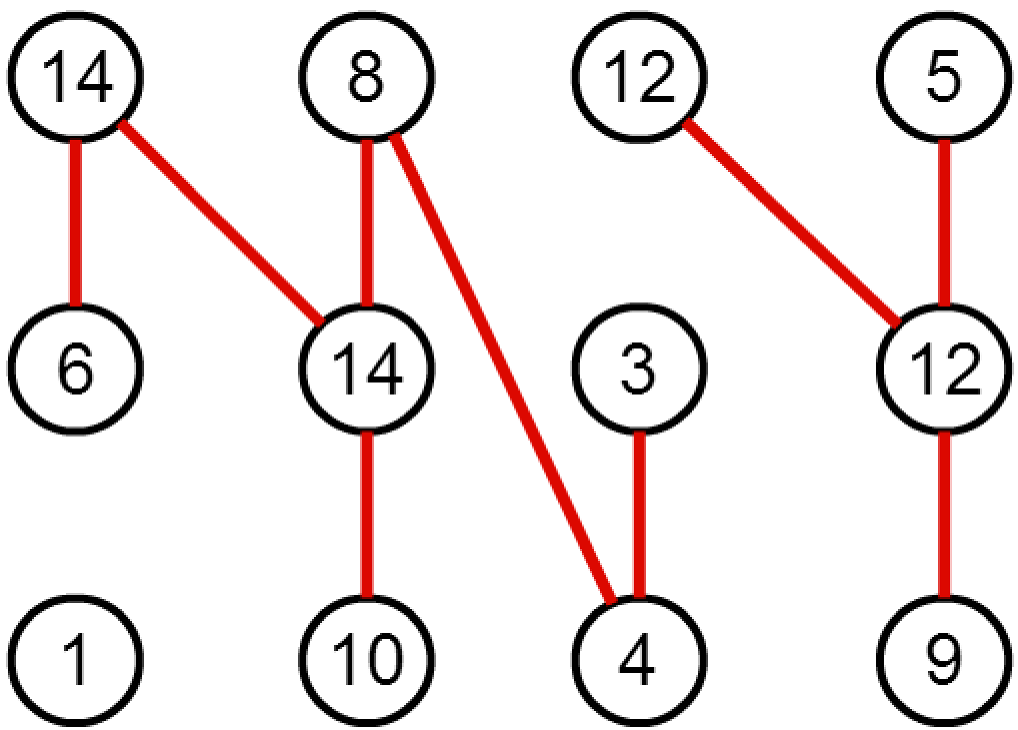
- 以下の様な値で動的計画法をする
- dp[x][s] = 大きい方から x 番目までについてラッキーにするかどうか決めていて、すでに値が書き込まれている頂点集合が s のときの得点の最大値
  - sはbitで表す

G-部分点解法

- 以下の様な値で動的計画法をする
- dp[x][s] = 大きい方から x 番目までについてラッキーにするかどうか決めていて、すでに値が書き込まれている頂点集合が s のときの得点の最大値
  - sはbitで表す
- 空間計算量はDPテーブルをリサイクルするとO(2^N)
- 更新はO(M*2^N)回
- N≦20ならば間に合う

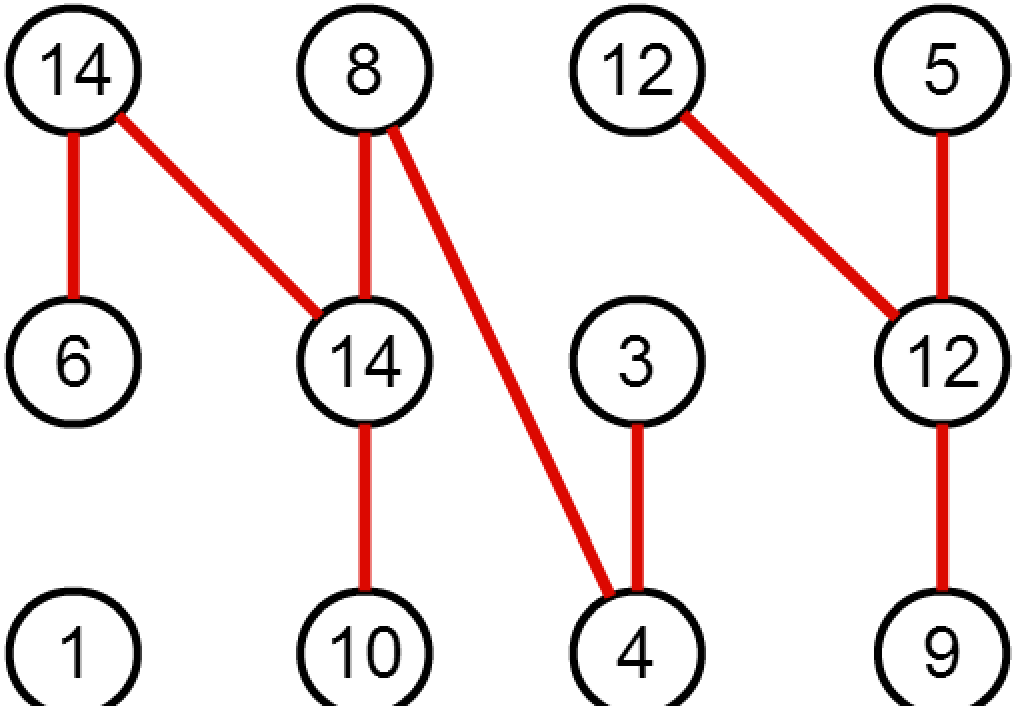
G-考察

- 出力例3の最終状態のラッキーな辺だけを取り出してみる



G-考察

- 出力例3の最終状態のラッキーな辺だけを取り出してみる
- 各連結成分は木構造をなしている！

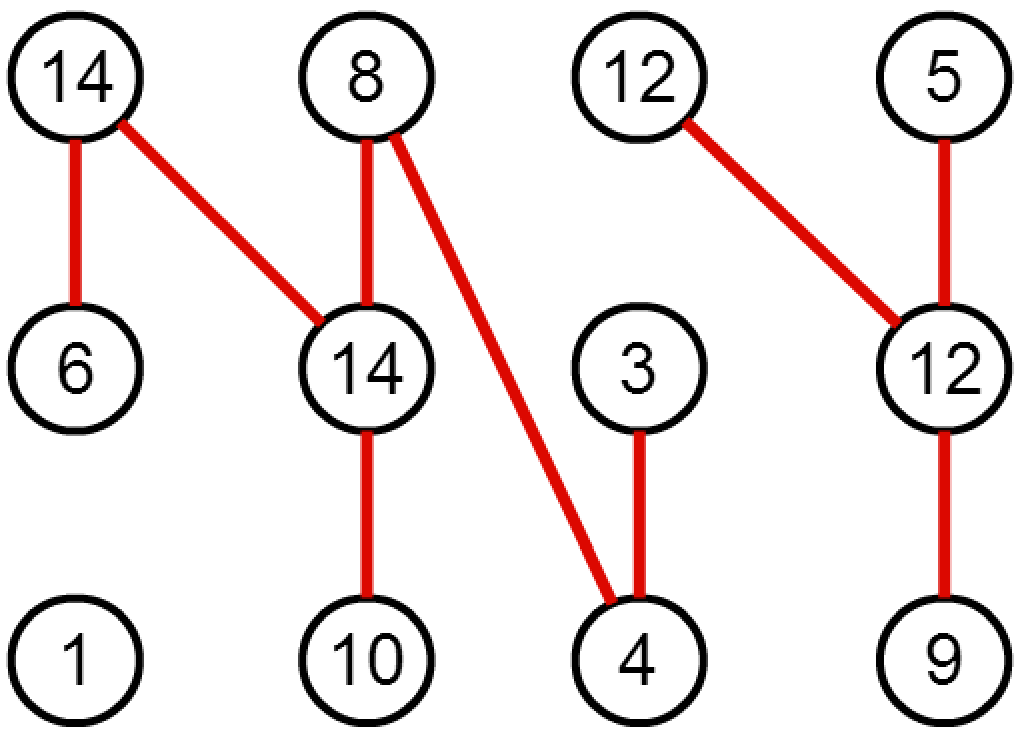


G-考察

- 出力例3の最終状態のラッキーな辺だけを取り出してみる
- 各連結成分は木構造をなしている！
- 全ての辺の値が異なることから、ラッキーな辺のループが生じないことが示せる

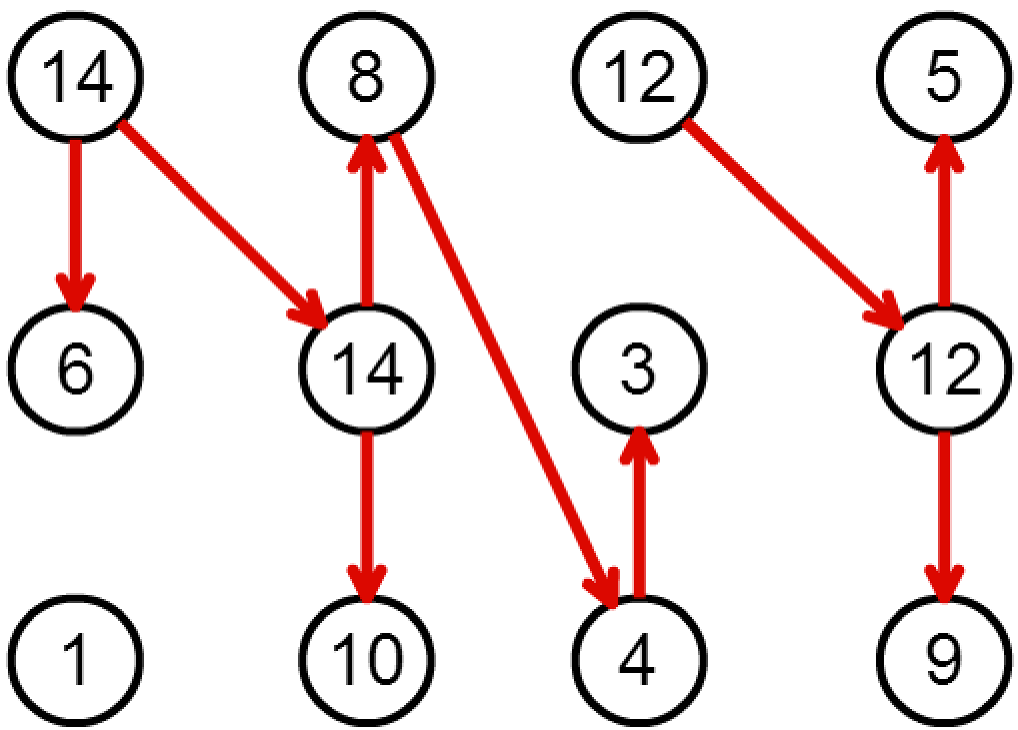
G-考察

- 各木構造をもっとよく見てみる



G-考察

- 各木構造をもっとよく見てみる
- うまく根をえらぶと、親より子の方が小さくなるようなヒープ構造になる



G-考察

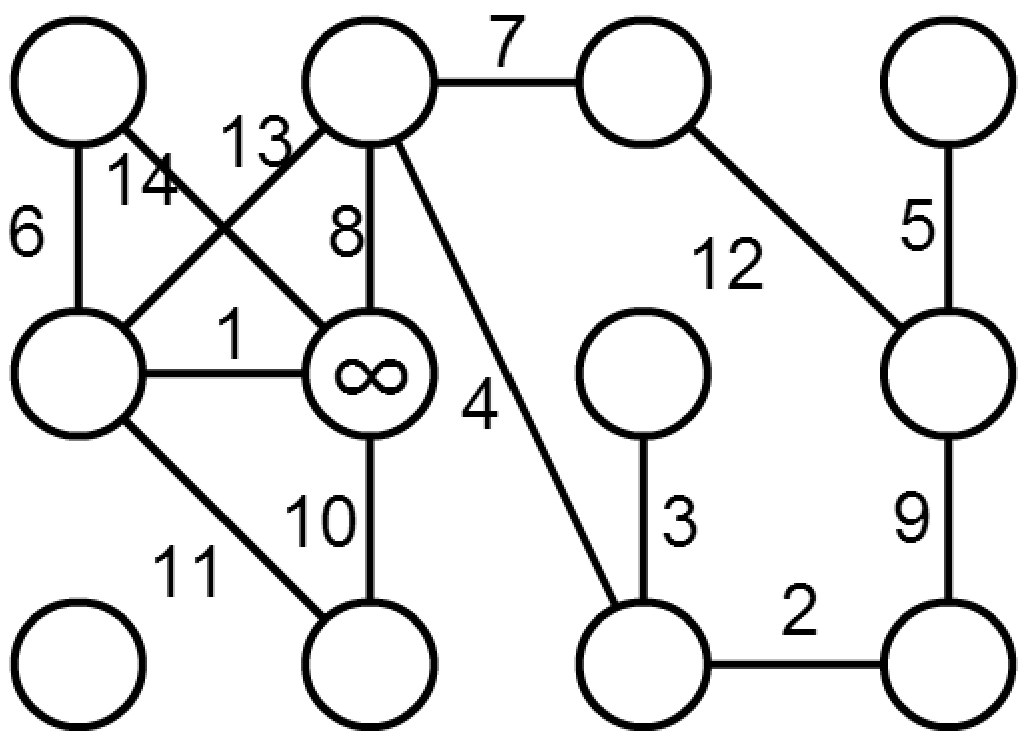
- 各木構造をもっとよく見てみる
- うまく根をえらぶと、親より子の方が小さくなるようなヒープ構造になる
- 各辺の値が異なることから、この性質も示せる

G-考察(重要)

- 頂点xを根とするような木が含まれるような最終状態のなかで、頂点xを根とする木のサイズが最も大きい物は以下の操作で作れる

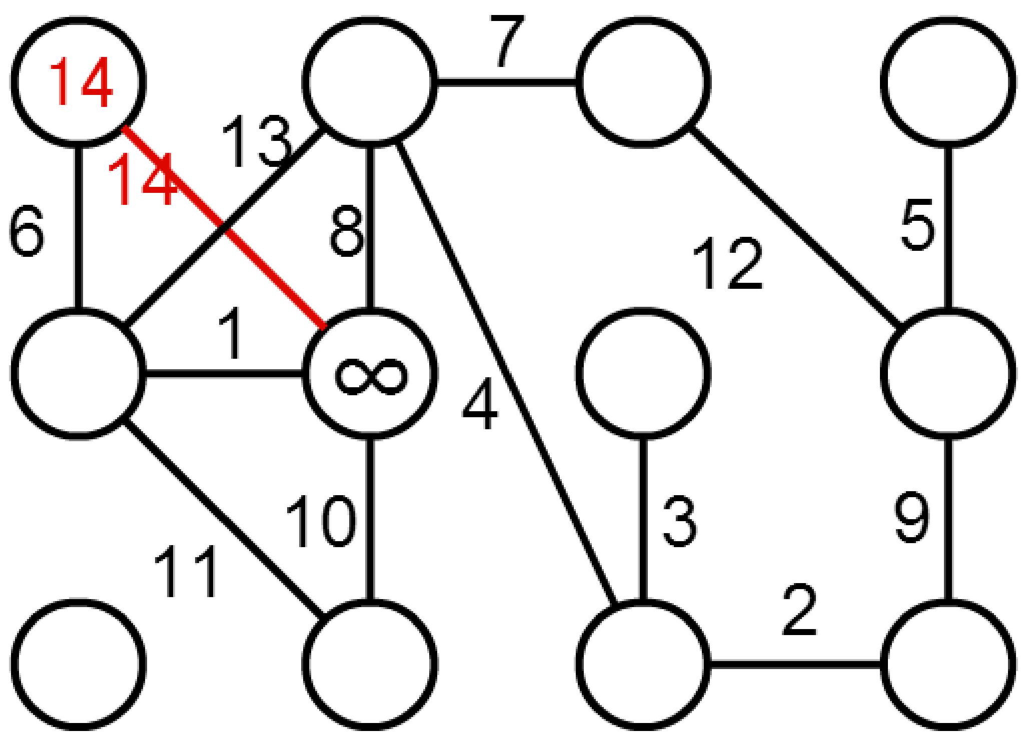
G-考察(重要)

- 1. xに十分大きい整数を書き込む



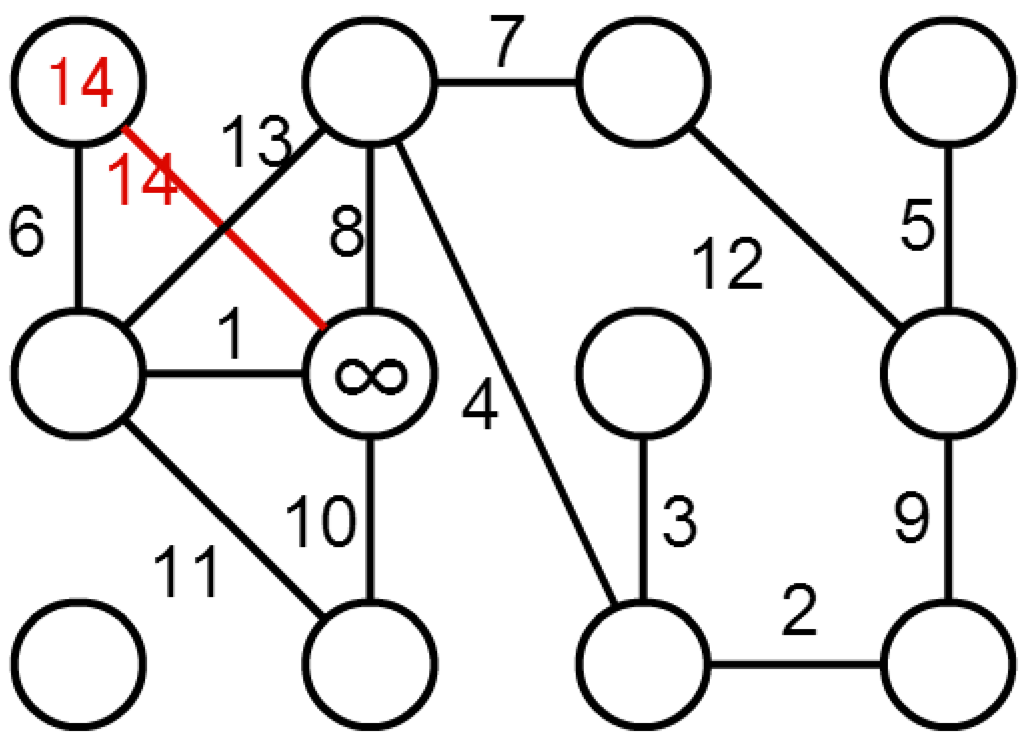
G-考察(重要)

- 2.書かれている整数が大きい順に辺をみてゆく



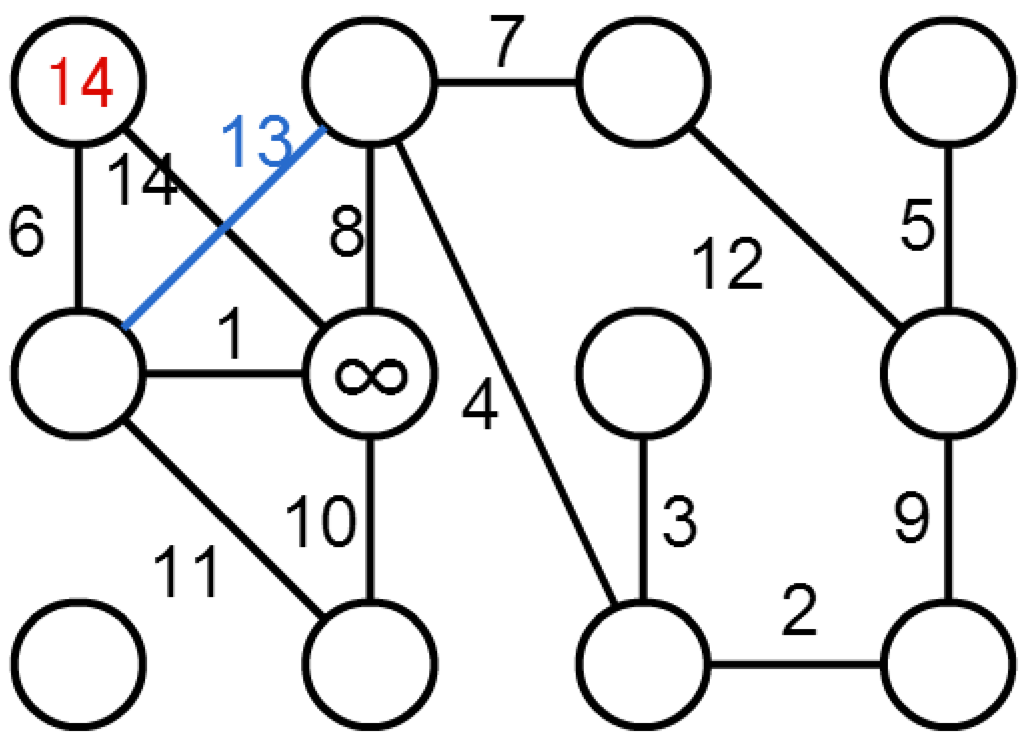
G-考察(重要)

- 3.整数が書かれている頂点と書かれていない頂点を結んでいるなら、書かれていない頂点にその辺の値を書き込む



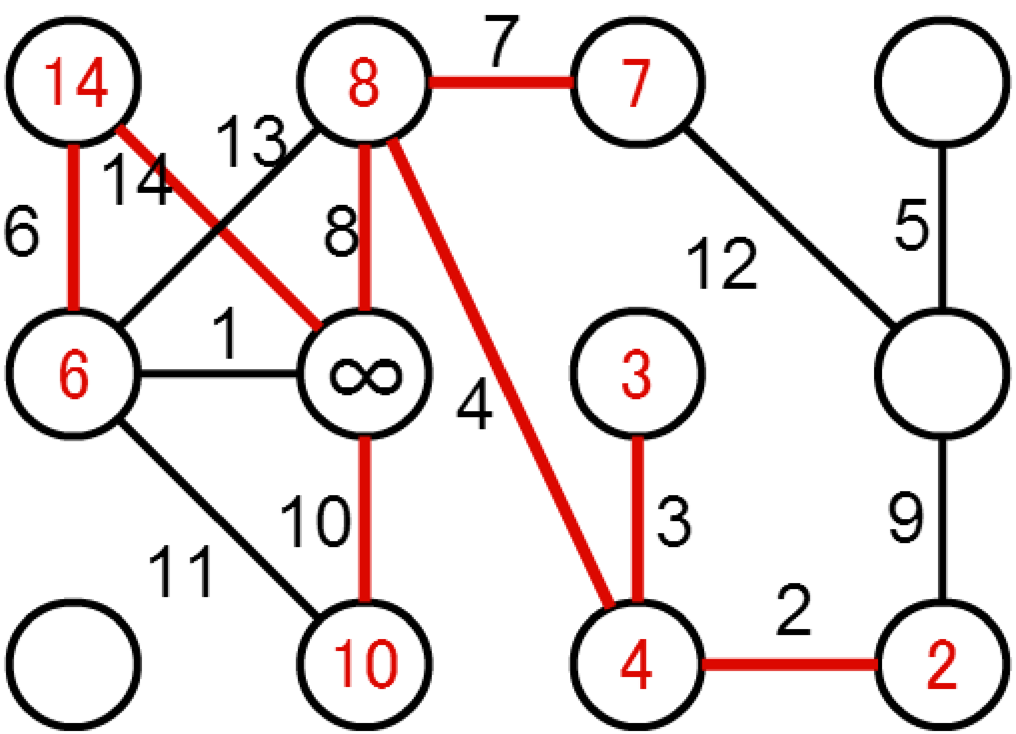
G-考察(重要)

- 4.そうでないならばなにもしない



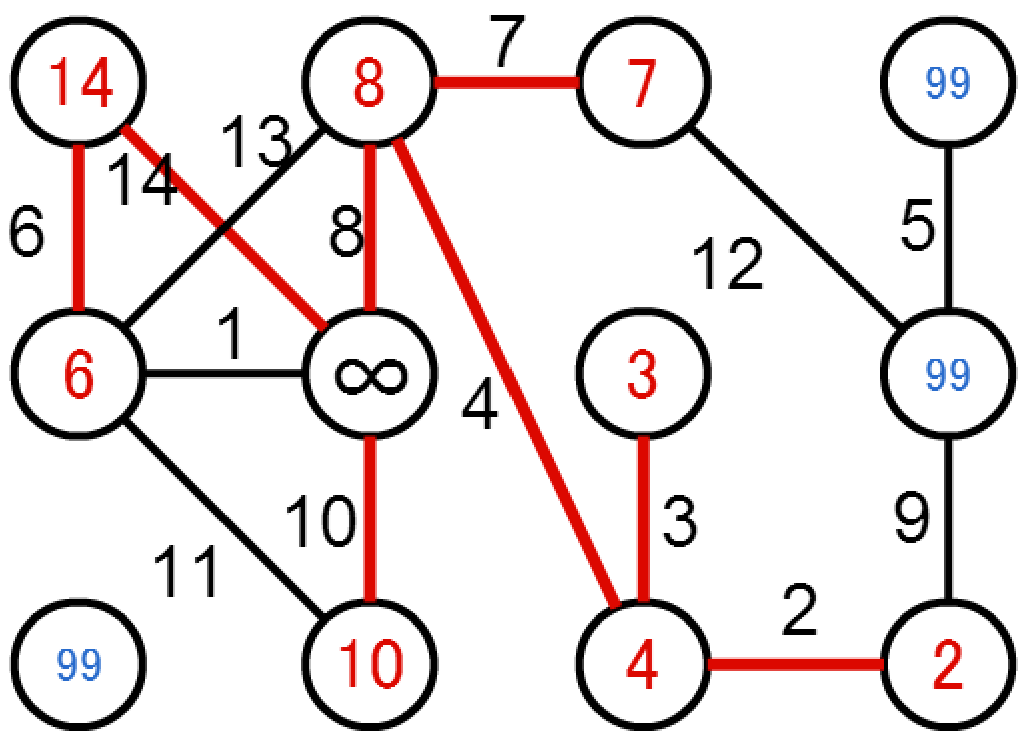
G-考察(重要)

- 5.全ての辺を見終わって、まだ何も書かれていない頂点が会ったら、何か値を書き込む



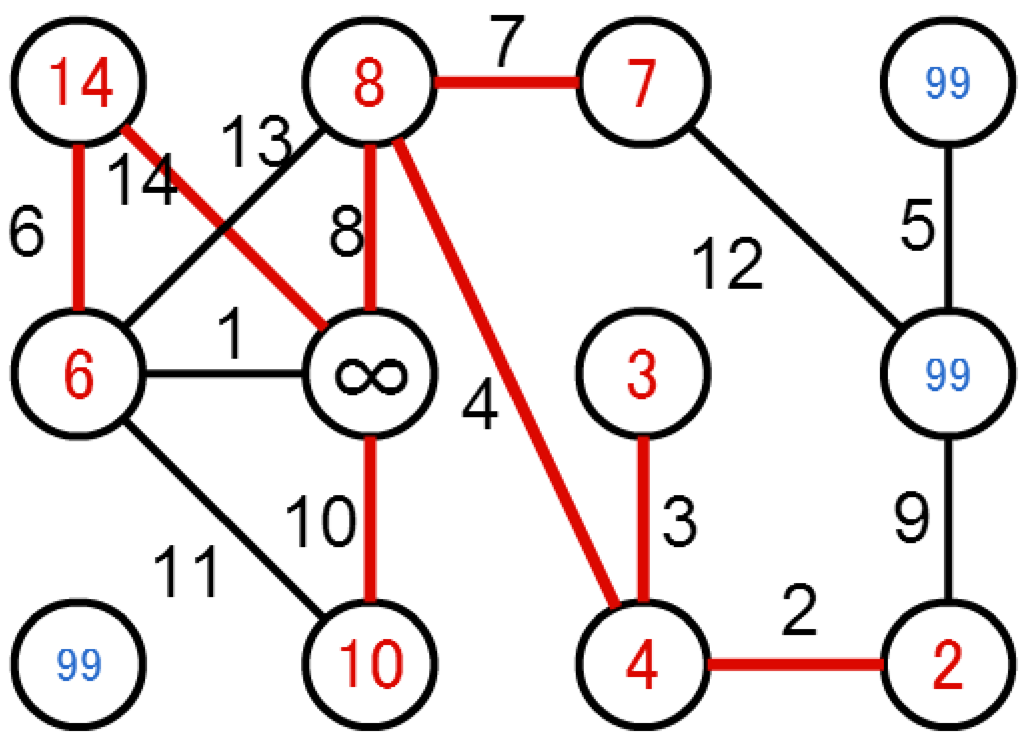
G-考察(重要)

- 5.全ての辺を見終わって、まだ何も書かれていない頂点が会ったら、何か値を書き込む



G-考察(重要)

- 6.出来上がった最終状態は条件を満たす



G-考察(重要)まとめ

- 頂点xを根とするような木が含まれるような最終状態のなかで、頂点xを根とする木のサイズが最も大きい物は以下の操作で作れる

1. xに十分大きい整数を書き込む
2. 値が大きい順に辺を見る
3. 新しく頂点に整数を書き込めるなら書く
4. 書き込めないなら何もしない
5. 何も書かれてない頂点を適当に埋める
6. 完成！

G-考察(重要)根拠

- この操作でxの子孫にならない頂点はどのような最終状態でもxの子孫にならない
  - 証明は時間の関係で略

- これと同じ発想で次の考察ができる

G-考察(もっと重要)

- 頂点a,b,c,...を根とするような木がそれぞれ含まれるような最終状態のなかで、それらの木の総頂点数が最も大きい物は以下の操作で作れる

1. a,b,c,...に十分大きい整数を書き込む
2. 値が大きい順に辺を見る
3. 新しく頂点に整数を書き込めるなら書く
4. 書き込めないなら何もしない
5. 何も書かれてない頂点を適当に埋める
6. 完成！

G-考察

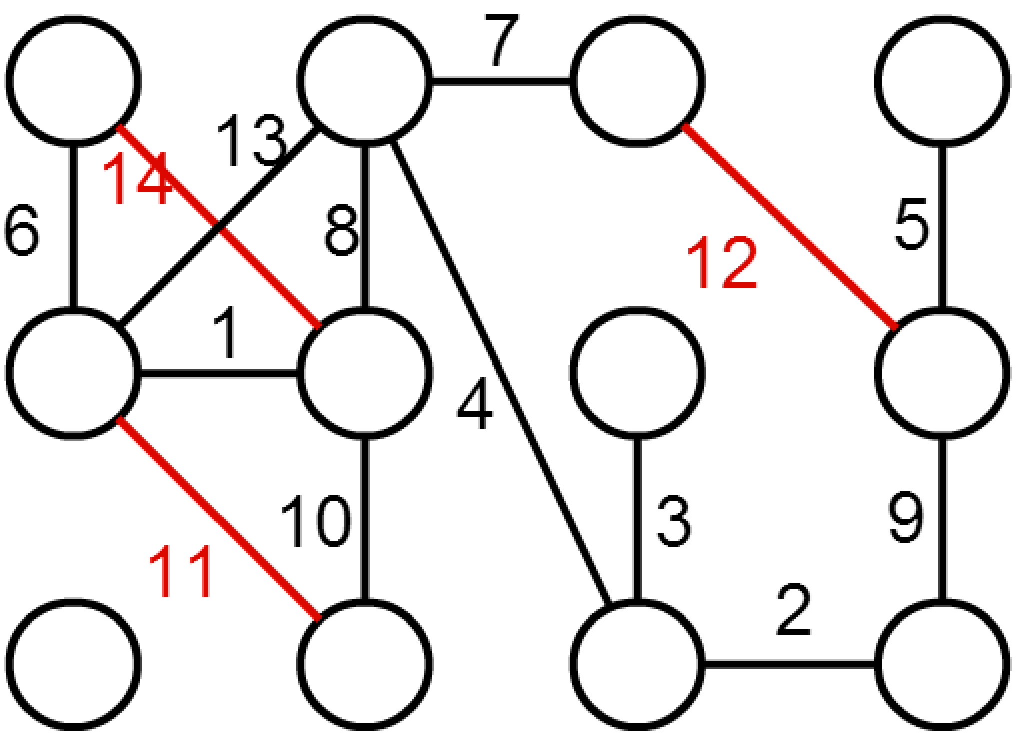
- 最適な最終状態について考える
- 頂点数1のグラフも根付き木と考えると、最適な最終状態はラッキーな辺の上で複数の根付き木(森)を作っている
- 先ほどの「考察(もっと重要)」を考えると、森を構成する木の根だけ考えれば、最適な最終状態を探索できる

G-考察

- 最適な最終状態について考える
- 頂点数1のグラフも根付き木と考えると、最適な最終状態はラッキーな辺の上で複数の根付き木(森)を作っている
- 先ほどの「考察(もっと重要)」を考えると、森を構成する木の根だけ考えれば、最適な最終状態を探索できる
- O(2^N)
  - まだ探索空間が大きすぎる

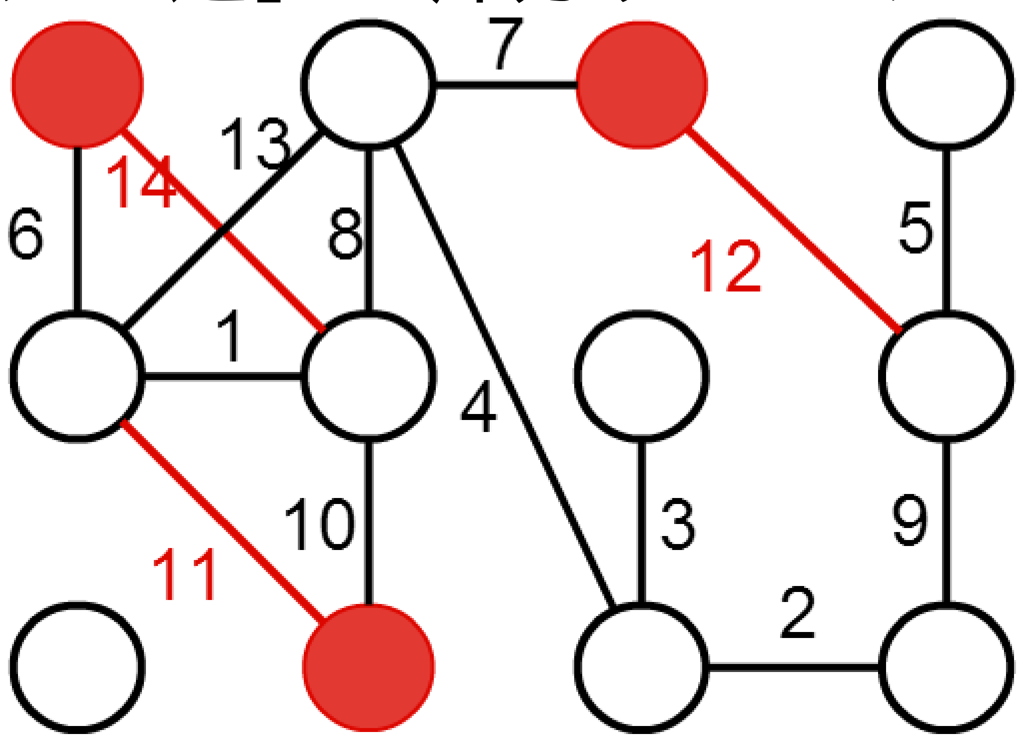
G-考察(一番重要)

- 隣接するどの辺よりも書かれている値が大きい辺を「極大な辺」とする



G-考察(一番重要)

- 隣接するどの辺よりも書かれている値が大きい辺を「極大な辺」とする
- 最適な最終状態の根の候補として考えるべき頂点は「極大な辺」の片方ずつだけでよい。



G-考察(一番重要)

- 隣接するどの辺よりも書かれている値が大きい辺を「極大な辺」とする
- 最適な最終状態の根の候補として考えるべき頂点は「極大な辺」の片方ずつだけでよい。
- 証明は時間の関係で略

G-満点解法

- 先ほどの考察で絞られた、最適な最終状態の根の候補それぞれについて根にするかどうかを決める。

G-満点解法

- 先ほどの考察で絞られた、最適な最終状態の根の候補それぞれについて根にするかどうかを決める。
- その前の考察で提示した操作をして、その根の集合のなかで最適な最終状態を作る

G-満点解法

- 先ほどの考察で絞られた、最適な最終状態の根の候補それぞれについて根にするかどうかを決める。
- その前の考察で提示した操作をして、その根の集合のなかで最適な最終状態を作る
- 全通りの中で最も最適なものが答え

G-満点解法

- 先ほどの考察で絞られた、最適な最終状態の根の候補それぞれについて根にするかどうかを決める。
- その前の考察で提示した操作をして、その根の集合のなかで最適な最終状態を作る
- 全通りの中で最も最適なものが答え
- 根の候補は極大な辺の個数分しか無い
  - 極大な辺は隣接しないのでたかだかN/2個

G-満点解法

- 先ほどの考察で絞られた、最適な最終状態の根の候補それぞれについて根にするかどうかを決める。
- その前の考察で提示した操作をして、その根の集合のなかで最適な最終状態を作る
- 全通りの中で最も最適なものが答え
- 根の候補は極大な辺の個数分しか無い
  – 極大な辺は隣接しないのでたかだかN/2個
- 計算量はO(M*2^(N/2)) 満点獲得