

天下一プログラマーコンテスト2014 予選B E問題 解説



AtCoder株式会社 代表取締役
高橋 直大

E問題 カラオケランキング

1. 問題概要
2. アルゴリズム

- L 曲あり、 i 番目の曲は K_i 点取ることが出来る。
- N 人が歌う。 i 番目の人は A_i 番目の曲を S_i 点取る
- M 回歌った補正付き点数の和を最大にしたい
 - 点数 x に対する補正付き点数 = $x + (x - \text{その曲の平均点})$
 - この時、 x も平均に加える
- 歌う曲とタイミングを M 個分出力せよ

- 制約
- $1 \leq L, N, M \leq 100000$
- $68.000 \leq K_i, S_i \leq 100.000$

- 全探索

- 合計 $N+M$ 回歌われる中で、どの M 回に歌えば良いかを選ぶ

- ${}_{N+M}C_M$ 通り存在し、これを評価するのに $N \times M$ 回の計算が必要

- この解法は到底間に合わない

- 部分点の $L=1$, $N, M \leq 2000$ でも間に合わない

- 何か工夫しないとイケない

- 動的計画法
 - 状態として、以下の2つの要素を取る
 - 「トモアキ君以外が何回歌ったか」
 - 「トモアキ君がどの曲を何回歌ったか」
 - $L=1$ の時、この状態数は $O(NM)$ となる
 - これに対し、歌う、歌わないの2通りを試していく
 - 部分点1の制約であれば問題ない
 - $L=1$ でないとき、後者の組み合わせが膨大
 - 部分点2以降は間に合わない

- L = 1についての考察

- トモアキ君以外の人の子数の和を、以下のように書く

- $sum[k] = \sum_{i=1}^k (K_1 - S_i), k = 0, 1, \dots, N$

- こうすると、トモアキ君が*i*回目に*T_i*番目の人の後に歌った場合の補正込みの子数は、以下のようになる

- $K_1 + \frac{sum[T_i]}{T_i + i + 1}$

- $sum[k]$ が負になる時に歌っても良いことはない($sum[0]=0$ より、ここで歌えば悪くならない)ので、負になる時は無視する。

- トモアキ君の補正込みの点数の総和の上界は、 T_i として、 $\frac{\text{sum}[T_i]}{T_{i+1}}$ が最も大きくなるような最小の T_i を取ってくれば、上界になる
- この式は、 T_i が大きい程、 i が増えた時の減少の割合が小さいため、 $T_i \leq T_{i+1}$ が満たされる
- よって、 $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_N \leq N$ が満たされ、これは最大値そのもの。
 - よって、 T_i ごとに貪欲に求めていくことが可能となる。

- 貪欲法
 - $L=1$ の時、
 - トモアキ君が i 回目に歌う時、最も補正付き点数が高くなるタイミングを探す $O(N)$
 - それを M 回繰り返すので、合わせた計算量は $O(NM)$
 - 動的計画法の時と同じ計算量

- 貪欲法

- $L > 1$ の時への拡張
- 各曲について、0回からM回歌った時の補正付き点数の和を計算することが可能
 - 全曲合わせて $O((N+L)M)$ となる
- これらの表から、全ての曲をM回歌った時の最大点数を計算出来るか？
 - 動的計画法だと、 $O(LM^2)$ となり、部分点2に間に合わない。
 - 同じ曲を歌う回数を、 i 回から $i+1$ 回の増加量は、 $i+1$ 回から $i+2$ 回の増加量より必ず大きい。
 - よって、動的計画法で、増加量の大きいものから貪欲に取れば良い。
 - この処理は手を抜いても $O(LM)$
 - この貪欲で部分点2を取ることが出来る

- 貪欲法 捕捉

- 各曲について、歌う回数0回からM回までの表を作る、と書いたが、本当は必要分だけ数えれば十分

- 貪欲に取るので、1回その曲を歌うと分かった時点で、2回歌った時の補正付き点数を計算すれば良い
- 計算量はどちらにしろ $O(NM)$ かかる。

• 貪欲法の高速化

- $L=1$ でも一緒なので、 $L=1$ について考える
 - それぞれについて計算し、増分の大きいものから貪欲に取るのは同じ
- j 番目の人の直後に歌うのと、 i 番目の人の直後に歌うことを比較することを考える ($j < i$)
- トモアキ君が歌う回数が x 回目、およびそれ以降であれば、 i 番目の人の直後の方が良い、という x を計算したい。
 - これが高速に計算出来れば、高速に解けるようになる

• 貪欲法の高速化

– トモアキ君が歌う回数が x 回目、およびそれ以降であれば、 i 番目の人の直後の方が良い、という x を計算したい。

- $sum[j] \geq sum[i]$ のとき、常に j が良いので無視する

- $sum[j] < sum[i]$ のとき、

- $$\frac{sum[j]}{j+x+1} < \frac{sum[i]}{i+x}$$

- これを解くと

- $$x > \frac{(i+1)sum[j] - (j+1)sum[i]}{sum[i] - sum[j]}$$

- となる x を求めることが出来る！

- » この変形が難しかったら、 x についての二分探索でも間に合う。

• 貪欲法の高速化

– $j < i$ に対し、どちらの後に歌うべきかの境界条件が求めれば、これを利用して、「何回目に歌う時はいつ歌うべき」という表を、スタックを利用して求めることができる。

- $\text{Start}[k]$ から $\text{End}[k]$ までは $\text{Num}[k]$ の後で歌う、のようなデータ構造を持つ
- 最初は $\text{count}=0$, $\text{Start}[\text{count}]=0$, $\text{End}[\text{count}]=M$, $\text{Num}[\text{count}]=0$
 - データが追加されたら $\text{count}++$ する
- 次回以降は、境界 X を先の手法で求め、
 - $X > M$ の時、何もしない
 - $\text{Start}[\text{count}-1] < X < M$ の時、
 - » $\text{End}[\text{count}-1] = X-1$ とし、新規にデータを追加する
 - $X < \text{Start}[\text{count}-1]$ の時、 count を 1 引いて、 X を求め直す

• 貪欲法の高速度化

– $L > 1$ への拡張

- 作った表に対して、「次の曲を歌うと何点入る」という情報を、優先度付きキューに入れる
- 優先度付きキューから最も良い曲を選び、適切なタイミングで歌った後、次に歌った場合の点数を再度優先度付きキューに入れなおす
- これをM回繰り返す

– 計算量は、

- 表を作る部分が $O(L + N)$
- 優先度付きキューを使って貪欲に取り出す部分が $O(M \log L)$
- となり、十分に間に合う。