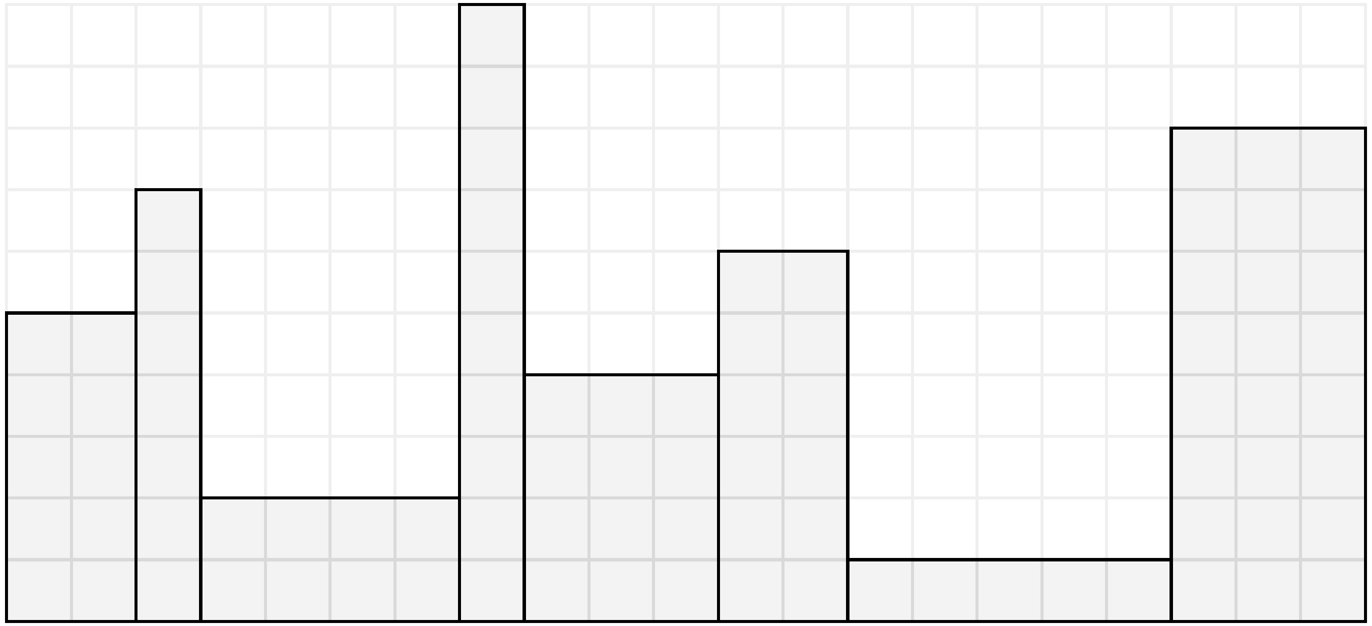
問題 E – 天下一コップ

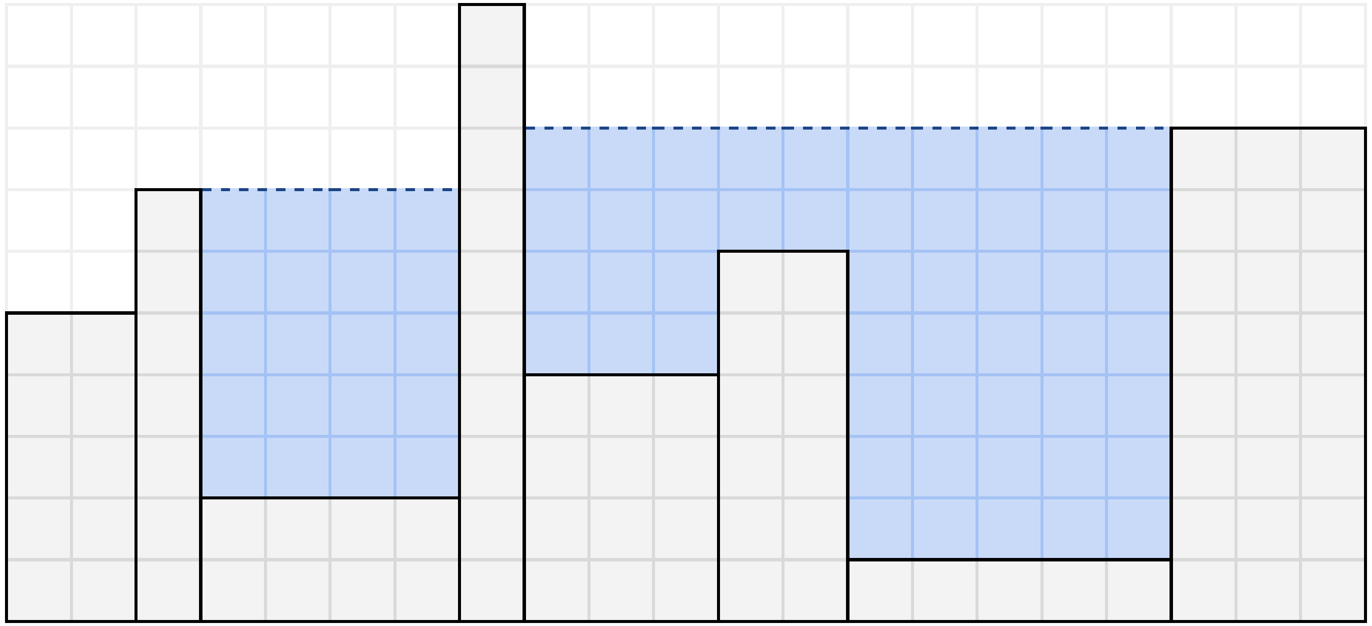
問題概要

- N 個の長方形を好きな順序で並べてコップを作る。



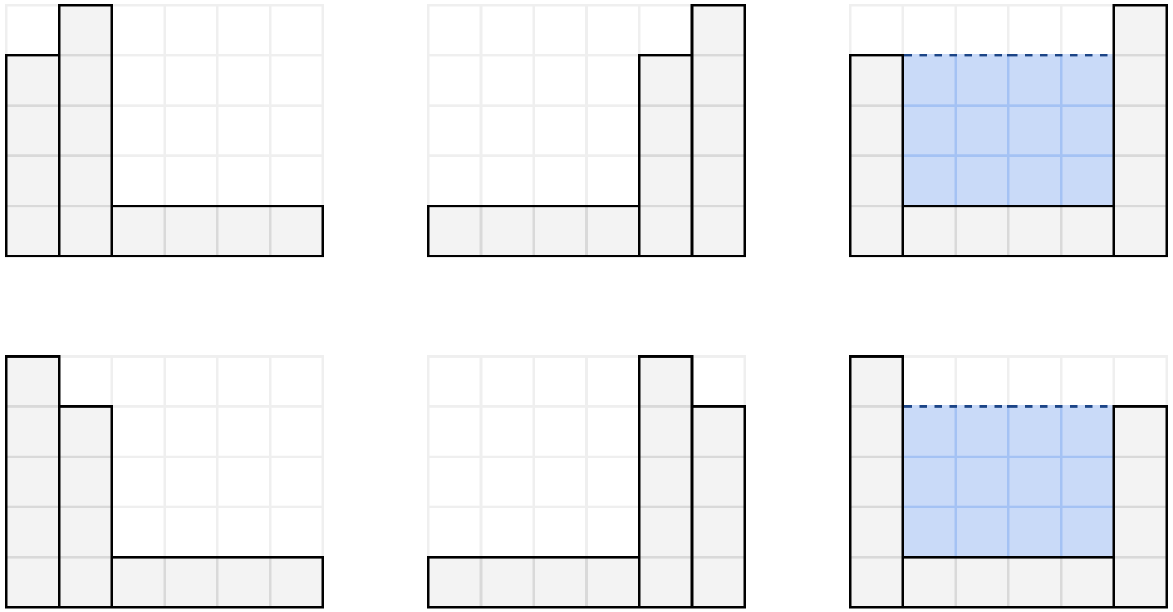
問題概要

- コップを水で満杯にしたとき、水の総面積を容積と呼ぶ。
- $N!$ 通りのコップの容積の和を 10^9+7 で割った余りを求めよ。



微小点解法

- $3 \leq N \leq 8$
- $N!$ 通りのコップを実際に作り、容積を計算する。

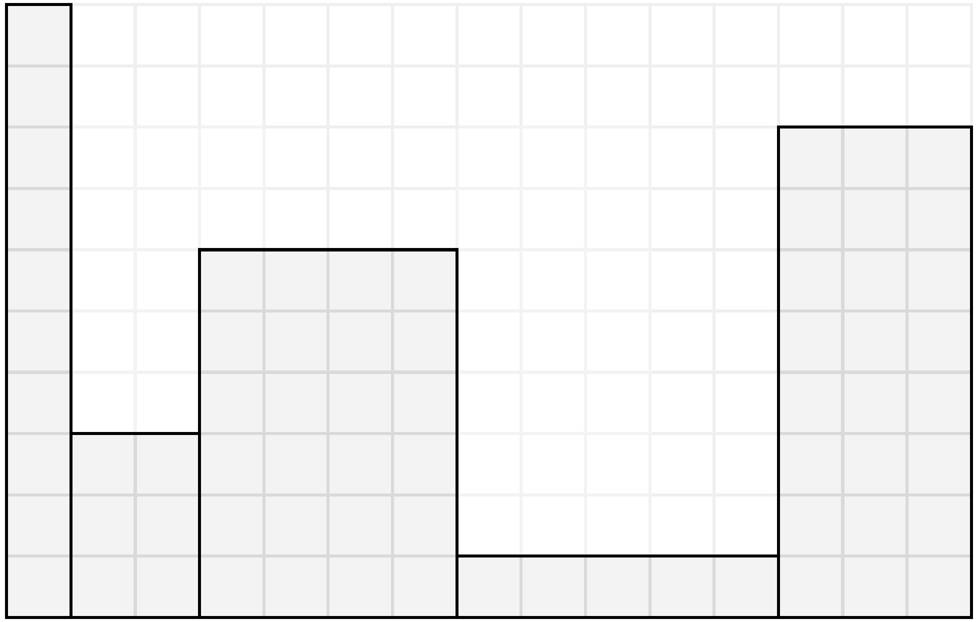


部分点解法

- $3 \leq N \leq 2{,}000$
- $N!$ 通りのコップの容積の期待値を求め、最後に $N!$ を掛ける。
- もちろん、割り算は $\mathrm{mod}\ (10^9 + 7)$ の逆元を掛けて行う。

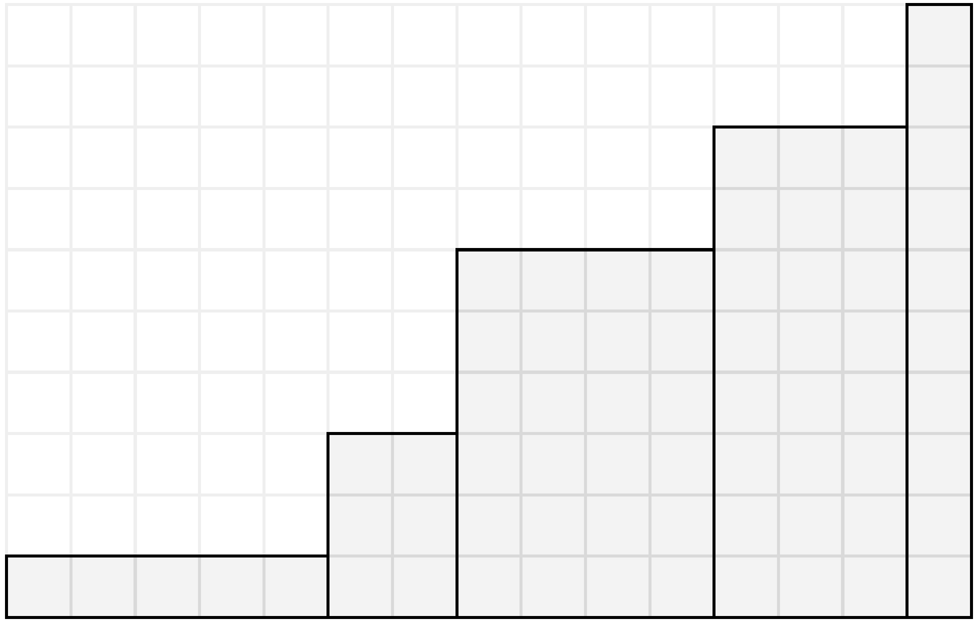
部分点解法

- このコップの容積の期待値を求めたい。



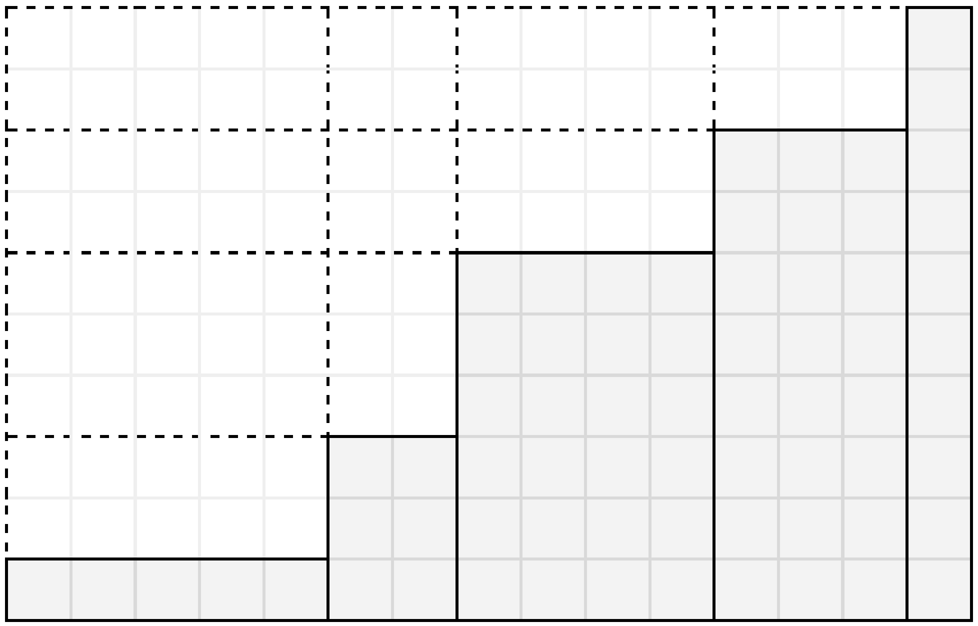
部分点解法

- まず、長方形を高さでソートする。



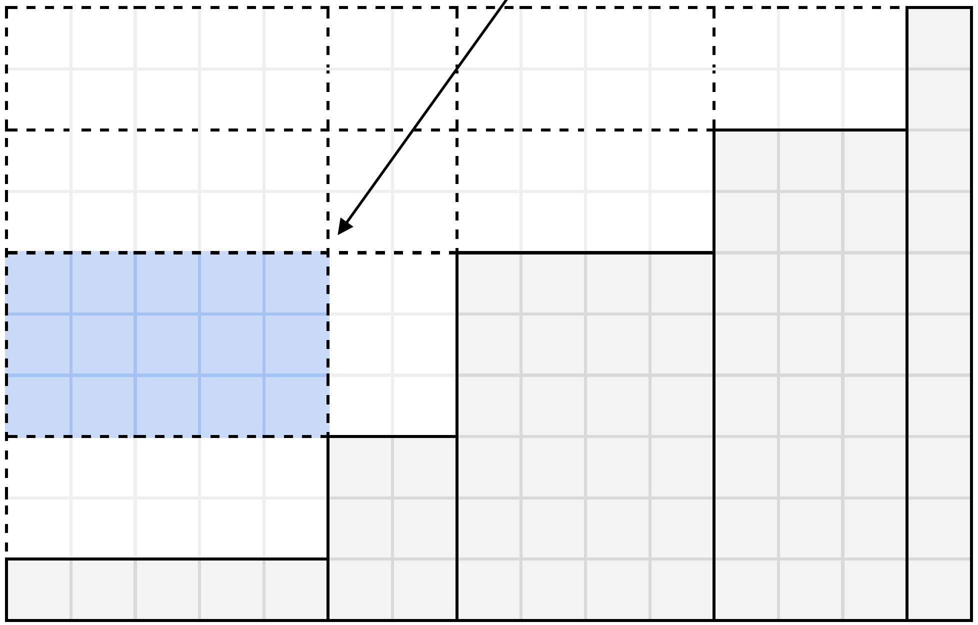
部分点解法

- 領域を分割する。



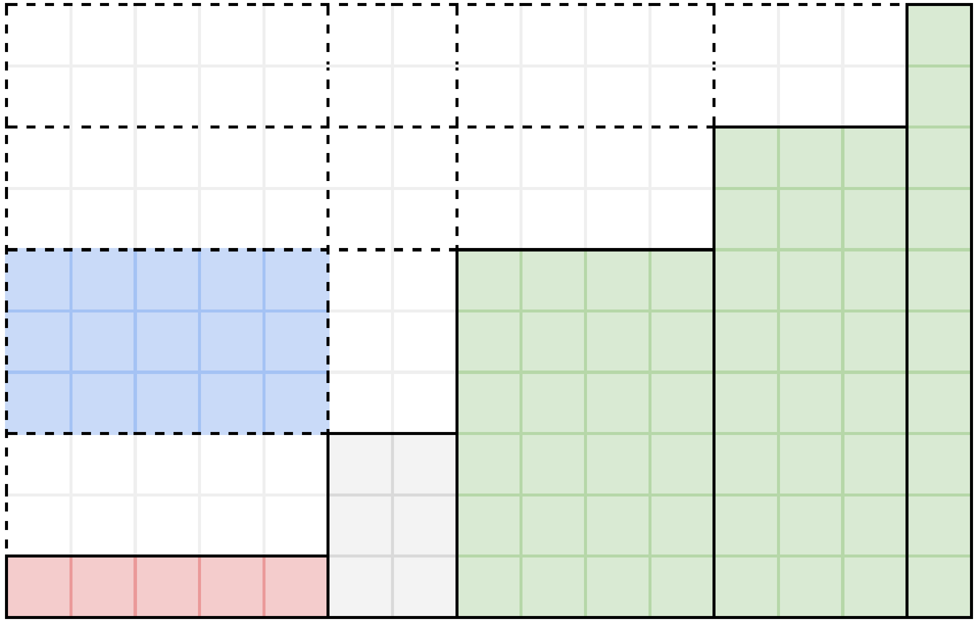
部分点解法

- 長方形をシャッフルしたとき、例えばこの領域に水が存在する確率を求めたい。



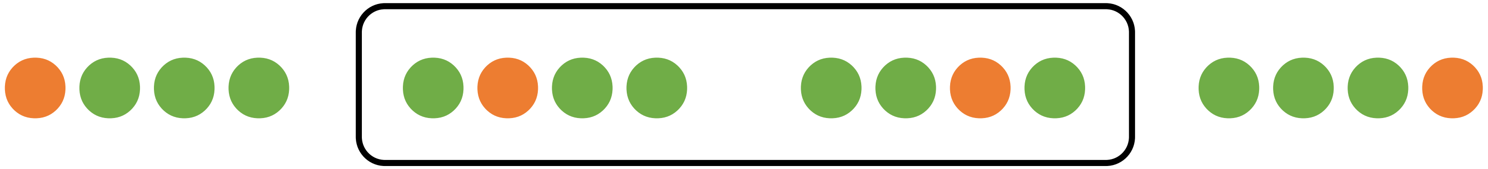
部分点解法

- この領域に水が存在するためには、赤の長方形が緑の長方形に左右から挟まれることが必要十分条件。
- このとき、白の長方形の位置は関係ない。



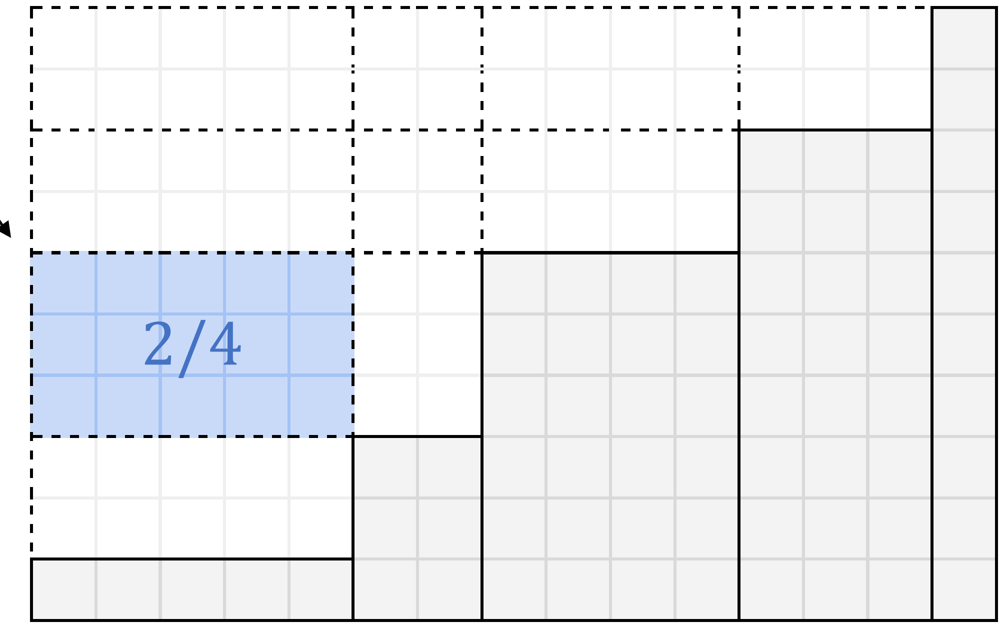
部分点解法

- つまり、● と ●●● をシャッフルしたとき、● が端に来ない確率を求めればよい。
- この確率は 2/4



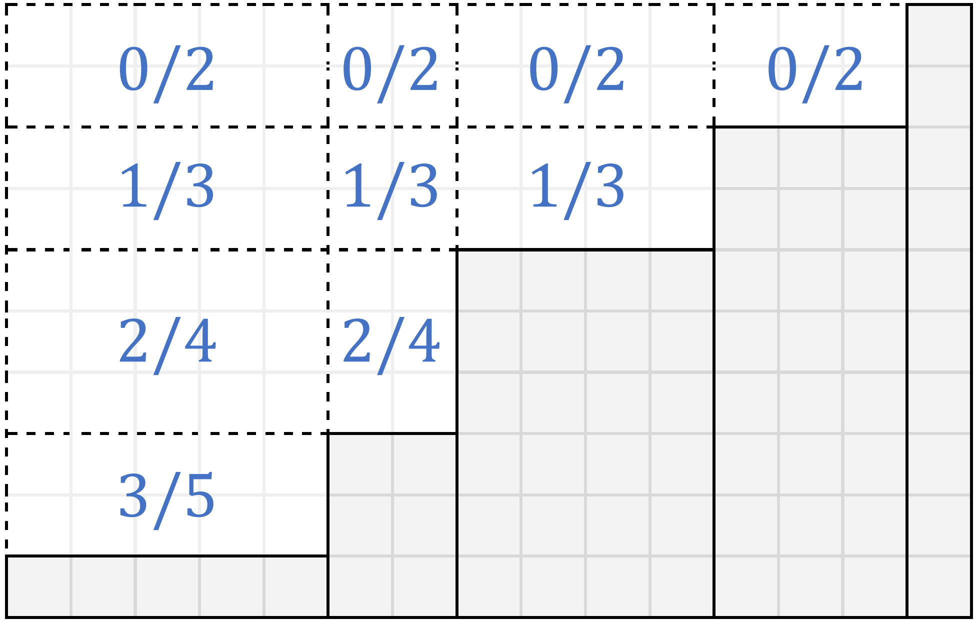
部分点解法

- この領域に水が存在する確率が求まった。



部分点解法

- 同様にして、それぞれの領域に水が存在する確率が求まる。
- それぞれの領域の (確率) × (面積) の総和が、容積の期待値。
- 計算量は $O(N^2)$



満点解法

- $3 \leq N \leq 10^5$
- 同じ高さの領域は確率が等しいので、まとめて計算できる。
- 計算量は $O(N)$